

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ**

**ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Геодезия»

**методические указания**

к выполнению практических работ по дисциплине

**«Методы уравнивания геодезических построений»**

Ростов-на-Дону

2024

УДК 528 (076.5)

Составители: Губеладзе О.А., Губеладзе А.Р.

Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «Методы уравнивания геодезических построений» // сост. А.Р. Губеладзе, О.А. Губеладзе, – Ростов-на-Дону: Донской гос. техн. ун-т, 2024.- 18 с. Предназначены для обучающихся по направлению подготовки 21.04.03 "Геодезия и дистанционное зондирование".

УДК 528 (076.5)

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Донского государственного технического университета

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Геодезия»

канд. техн. наук, доцент М.А. Николенко

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

В печать хх.хх.20ххг.

Формат 60×84/16. Объем 1,1 усл. п. л.

Тираж 50 экз. Заказ № ххх

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Издательский центр ДГТУ

Адрес университета и полиграфического предприятия:

344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

© Донской государственный

технический университет, 2024

**Тема 1. Параметрический способ уравнивания**

**1.1. Порядок уравнивания**

Уравнивание параметрическим способом осуществляется в такой последовательности:

1. Определяют надежные значения *k* величин *T*1, *T*2, ... , *Tk*.

2. Производят замену неизвестных через приближенные значения *tj*  и поправки к ним *δtj*

3. Составляют уравнения поправок в общем виде

 (1.1)

Приводят их к линейному виду

 (1.2)

4. Вычисляют свободные члены уравнений поправок.

5. Составляют уравнения поправок в матричной форме:

**,(1.3)

где

 (1.4)

6. Транспонируют матрицу *A*.

7. Получают систему нормальных уравнений в матричной форме:

 (1.5)

где

; (1.6)

. (1.7)

8. Подставив полученные значения из (1.6) и (1.7) в уравнение (1.5), получают обычный вид системы нормальных уравнений в параметрическом способе уравнивания

 (1.8)

9. Умножая равенство (1.5) на обратную матрицу *N-*1, получают



Принимая во внимание, что *N*-1*N* = *E*, выражают искомый вектор

*T* = - *N*-1*A'PL = B* *L*,(1.8)

где *B* = - *N*-1*A'P* - матрица линейных преобразований.

10. Подставляя вектор поправок (1.8) в равенство (1.3), получают вектор поправок в результаты измерений

V = - *AN*-1*A'PL* + *L*. (1.9)

11. Производят оценку точности полученных результатов:

В том случае, если возникает необходимость оценить какую-либо величину, связанную с уравненными значениями измеренных величин определенными функциональными зависимостями, т.е.

. (1.10)

Тогда средняя квадратическая ошибка функции определится согласно

, (1.11)

Как мы видим, задача сводится к нахождению обратного веса функции. Выразим нашу функцию через приближенные значения *t*1, *t*2, ... , *tk*  и поправки к ним *δt*1, *δt*2, ... , *δtk*

. (1.12)

Разложим данную функцию в ряд Тейлора, ограничиваясь первыми степенями разложения, получим



обозначим

*F*(*t*1, *t*2, ... , *tk*) = *f*0;  = *fj* ,

тогда

*U = f*0 + *f*1 *δt*1 + *f*2 *δt*2 + ... + *fkδtk*. (1.13)

Обратный вес функции можно получить из совместного решения систем нормальных уравнений

** (1.14)

Контрольной формулой вычисления обратного веса является следующее выражение

 (1.15)

где

 (1.16)

**1.2. Уравнивание геодезического четырехугольника**

  
Рис. 1. Схема геодезического четырехугольника

Исходные данные: координаты пунктов *A*, *C* (рис. 1)

*XA =* 4618742,624 м; *YA =* 7221870,144 м;

*XC* = 4615909,521 м; *YC =* 7218431,808 м.

**(Варианты для выполнения данной работы в таблице Приложения)**

Измеренные величины: углы четырехугольника при вершинах *ABCD* (табл. 1).

Определяемые величины: координаты пунктов *B*, *D*.

Таблица 1- Измеренные и уравненные углы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N/N углов | Свободные члены  сек | Углы, вычисленные по приближенным  координатам | Измеренные углы | Поправки  сек | Уравненные углы |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | -0,01 | 57о 02’ 10.75” | 57о 02’ 10.76” | 0.61 | 57о 02’ 11.37” |
| 2 | -2,20 | 42о 29’ 46.43” | 42о 29’ 48.63” | -0.91 | 42о 29’ 47.72” |
| 3 | 1,04 | 36о 25’ 31.78” | 36о 25’ 30.74” | 0.61 | 36о 25’ 31.35” |
| 4 | -0,01 | 44о 02’ 31.03” | 44о 02’ 31.04” | -1.48 | 44о 02’ 29.56” |
| 5 | -0,03 | 42о 56’ 32.11” | 42о 56’ 32.14” | 0.53 | 42о 56’ 32.67” |
| 6 | -2,34 | 56о 35’ 25.07” | 56о 35’ 27.41” | -0.99 | 56о 35’ 26.42” |
| 7 | 2,05 | 43о 43’ 02.58” | 43о 43’ 00.53” | 1.13 | 43о 43’ 01.66” |
| 8 | 0,01 | 36о 45’ 00.23” | 36о 45’ 00.22” | -0.98 | 36о 44’ 59.24” |

Используя значения измеренных углов, вычисляют приближенные координаты пунктов *B* и *D* согласно формулам Юнга при решении прямой засечки (рис. 2)

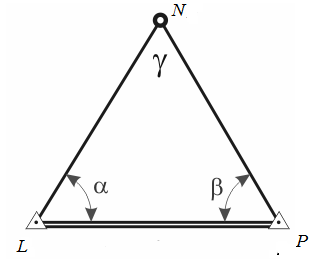


Рис. 2. Прямая геодезическая засечка

 (1.10)

где *XL, YL, XP, YР* - координаты левого пункта *L* и правого пункта *P* соответственно.

Приближенные значения координат выписывают в таблицу 2.

Таблица 2 - Приближённые координаты определяемых пунктов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Наименование пунктов | Измеренные углы | Координаты | |
| X | Y |
| *A* | 57о 02’ 10.76” | 4615909.521 | 7218431.808 |
| *C* | 44о 02’ 31.04” | 4618742.625 | 7221870.144 |
| *B* | 78о 55’ 18.20” | 4619045.068 | 7218073.227 |
| *A* |  | 4615909.521 | 7218431.808 |
| *C* | 42о 56’ 32.14” | 4618742.625 | 7221870.144 |
| *A* | 36о 45’ 00.22” | 4615909.521 | 7218431.808 |
| *D* | 100о 18’ 27.64” | 4616056.864 | 7221513.215 |
| *C* |  | 4618742.625 | 7221870.144 |

Составляют уравнения поправок измеренных углов относительно направлений (рис. 3).

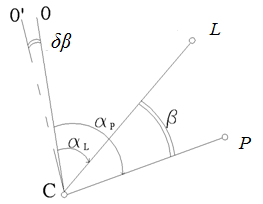


Рис. 3. Схема к составлению уравнений поправок

Уравнения поправок направлений *CL* и *CP* имеют вид:

 (1.11)

где *δβ* - поправка нулевого направления;

*δx*, *δy* - поправки к приближенным координатам.

Вычитая из правого направления левое, получают

 (1.12)

где *Vβ* - поправка в измеренный угол *β*.

Приближённые значения дирекционных углов и длин линий *CL* и *CP*

 (1.13)

Найдем значения коэффициентов *a*, *b*, *c*, *e* в уравнении (1.12)



По аналогии



Подставляя значения коэффициентов в уравнение (1.13), получают уравнение поправок в окончательном виде

 (1.14)

Свободный член уравнения поправок вычисляем по формуле

, (1.15)

где

 (1.16)

Коэффициенты уравнений поправок и выражения для  в буквенном виде представлены в таблице 3.

Вычисляют углы , используя исходные и приближенные координаты пунктов, результаты вычислений представлены в таблице 4.

По формуле (1.6) вычисляют свободные члены уравнений поправок (табл. 1). Согласно формулам (табл. 3) определяют коэффициенты уравнений поправок. Величины коэффициентов должны иметь размерность сек/см.

Из численных значений коэффициентов уравнений составляют матрицу *А*. Матрицу *А* транспонируют и умножают ее слева на матрицу *А*.

;

В результате получают квадратичную матрицу *N* коэффициентов нормальных уравнений

.

Находим матрицу, обратную матрице *N*



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Угол/ пункт | Поправки к приближённым координатам | | | | | Тангенсы углов0 |
|  |  |  |  |  | |
| 1/*A* |  |  | -------- | -------- |  | |
| 2/*B* |  |  |  |  |  | |
| 3/*B* |  |  |  |  |  | |
| 4/*C* |  |  | ---------- | ---------- |  | |
| 5/*C* | --------- | --------- |  |  |  | |
| 6/*D* |  |  |  |  |  | |
| 7/*D* |  |  |  |  |  | |
| 8/*A* | -------- | ---------- |  |  |  | |

Таблица 3 - Коэффициенты уравнений поправок и тангенсы углов, вычисленных по приближённым координатам

Таблица 4 - Вычисление углов по координатам

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N/N  углов | Направ-ления | Приращения | |  |  |
|  |  |
| 1 | *AB* | -3135,547 | 358,581 | 1,54200406 | 57о02’10.75” |
| *AC* | -2833,104 | -3438,336 |
| 2 | *BD* | 2988,204 | -3439,988 | 0,91621018 | 42о29’46.43” |
| *BA* | 3135,547 | -358,581 |
| 3 | *BC* | 302,443 | 3796,917 | 0,73795065 | 36о25’31.78” |
| *BD* | 2988,204 | -3439,988 |
| 4 | *CA* | 2833,104 | 3438,336 | 0,96710484 | 44о02’31.03” |
| *CB* | -302,443 | 3796,917 |
| 5 | *CD* | 2685,761 | 356,929 | 0,93063256 | 42о56’32.11” |
| *CA* | 2833,104 | 3438,336 |
| 6 | *DB* | -2988,204 | 3439,988 | 1,51602097 | 56о35’25.07” |
| *DC* | -2685,761 | -356,929 |
| 7 | *DA* | 147,343 | 3081,407 | 0,95620139 | 43о43’02.58” |
| *DB* | -2988,206 | 3439,988 |
| 8 | *AC* | -2833,104 | -3438,336 | 0,74673719 | 36о45’00.23” |
| *AD* | -147,343 | -3081,407 |

Вычисляем матрицу-столбец свободных членов нормальных уравнений

*L = AТl* ***=***.

Определяем вектор-столбец поправок к приближенным координатам. Результаты получаем в сантиметрах

*Т = - N-1L* ***=***.

Полученные поправки заносят в таблицу 5, предварительно представив размерность была в метрах. В дальнейшем находят уравненные значения координат определяемых пунктов *B* и *D* .

Таблица 5 - Координаты пунктов

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Наименование пункта | Приближенные координаты | | Поправки | | Исходные и уравненные координаты | |
| *X0* | *Y0* | *δx*, м | *δy*, м | *X* | *Y* |
| *C* | - | - | - | - | 4618742,624 | 7221870,144 |
| *A* | - | - | - | - | 4615909,521 | 7218431,808 |
| *B* | 4619045,068 | 7218073,227 | -0,027 | -0,006 | 4619045,041 | 7218073,221 |
| *D* | 7616056,864 | 7221513,215 | 0,015 | 0,009 | 4616056,879 | 7221513,224 |

Вычисляем вектор-столбец поправок к измеренным углам

*V = AT + l* ***=*** .

Полученные результаты записывают в таблицу 1 и определяют уравненные углы.

Контроль:

1. ;

2. Сумма поправок должна равняться сумме свободных членов уравнений поправок.

Определяем эмпирическую среднюю квадратическую ошибку измеренного угла



оцениваем ее надежность.

Обозначив  находим средние квадратические ошибки положения определяемых пунктов по осям координат

Пункт *B*  Пункт *D*

Находим средние квадратические ошибки положения определяемых пунктов  

Используя элементы матрицы находим параметры эллипсов ощибок положения определяемых пунктов

Пункт *B* Пункт *D*

Строим эллипсы ошибок на схеме сети. Вычисляем среднюю квадратическую ошибку уравненного угла



**Тема 2. Коррелатный способ уравнивания**

**2.1.Матричный способ**

Система условных уравнений поправок

*A V + W = 0* (2.1)

преобразуется в систему нормальных уравнений:

*(A Q AT) K + W = 0*, (2.2)

где *А* – матрица коэффициентов условных уравнений, состоящая из *п* столбцов и *k* строк;

*п* – число измеренных углов;

*k* – число условных уравнений;

*Q = P-1* – обратная весовая матрица (при равноточных измерениях углов *Q = E* и ее можно не учитывать, т.е. *A Q AT = А АТ*);

*W* – вектор невязок в условных уравнениях.

При решении нормальных уравнений вычисляются коррелаты:

*K = - (A Q AT)-1 W.* (2.3)

Поправки в измеренные углы вычисляются по формуле:

*V = Q K AT.* (2,4)

По вычисленным уравненным углам *х\* = х + v* окончательно решаются треугольники и вычисляются уравненные координаты всех определяемых пунктов сети триангуляции.

## 2.2. Оценка точности по материалам уравнивания

Составим функциональную зависимость между определяемой величиной и уравненными значениями

. (2.5)

Средняя квадратическая ошибка такой функции определится согласно

. (2.6)

Ошибка единицы веса равна

. (2.7)

Поскольку *Xi* = *xi* + *vi* , функция (2.5) примет вид

. (2.8)

Для приведения к линейному виду разложим функцию (2.8) в ряд Тейлора

,

а если введем обозначения

*F*(*x*1, *x*2, ... , *xk*) = *f*0;  = *fi* ,

то получим

. (2.9)

Если в равенство (2.9) вместо поправок подставить их значения из уравнений коррелат (2.3), получим следующее выражение нашей функции

*.* (2.10)

Обратный вес функции определяется в схеме решения нормальных уравнений согласно равенству

. (2.11)

Для контроля правильности вычисления обратного веса функции используется контрольная формула

.

**2,1. Уравнивание геодезического четырехугольника**

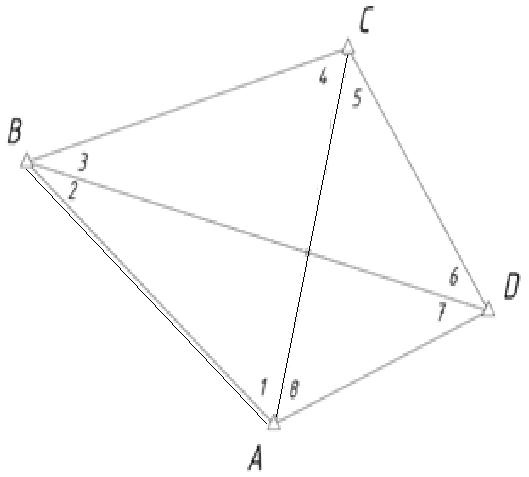


Рис. 4. Схема геодезического четырехугольника

**(Уравненные координаты пунктов *A* и *B* в предыдущей работе являются координатами исходных пунктов *A* и *B* для данной работы)**

Координаты исходных пунктов *A*,*B* приведены в табл. 9.

Горизонтальные углы измерены равноточно. Их значения приведены в табл. 10.

Определяем число избыточных измерений

,

где *n* – число всех измерений, *t* – число неизвестных

Таблица 9 - Координаты исходных пунктов и определяемых пунктов, вычисленные по уравненным углам

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Наименвание пунктов | Координаты | |
| *X* | *Y* |
| *A* | 600449,146 | 7239628,382 |
| *B* | 602815,386 | 7239915,593 |
| *C* | 602847,421 | 7243135,237 |
| *D* | 600141,020 | 7243569,854 |

Таблица 10 - Измеренные и уравненные углы. Коэффициенты условных уравнений

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № углов | Измеренные углы | Коэффициенты условных уравнений | | | | Поправки,  сек | Уравненные углы |
| *a* | *b* | *c* | *d* |
| k= | 0.111 | -0.621 | 0.341 | 0.402 |
| 1 |  | 1 | 1 | 0 | 0.878 | -0.16 |  |
| 2 |  | 1 | 1 | 0 | -0.561 | -0.74 |  |
| 3 |  | 1 | 0 | 1 | 1.338 | 0.99 |  |
| 4 |  | 1 | 0 | 1 | -1.494 | -0.15 |  |
| 5 |  | 1 | -1 | 0 | 0.472 | 0.92 |  |
| 6 |  | 1 | -1 | 0 | -1.011 | 0.33 |  |
| 7 |  | 1 | 0 | -1 | 1.617 | 0.42 |  |
| 8 |  | 1 | 0 | -1 | -1.242 | -0.73 |  |
|  | W= | -0.89 | 2.14 | -1.15 | -3.513 | 0.89 |  |

Составляем условные уравнения. На первый взгляд может показаться, что в данной системе – пять геометрических условий фигур: треугольники *ABC*, *ACD*, *ABD*, *DBC* и четырехугольник *ABCD*. На самом деле независимыми здесь будут только три условия, остальные – линейные комбинации первых трех.

Вместо трех условий фигур в данном случае будет удобно иметь одно условие фигуры - четырехугольника

, (2.12)

где ,

и два условных уравнения сумм и разностей

 (2.13)

где , .

Как это видно на схеме сети (рис. 4), применив теорему синусов, будем иметь отношение

, (2.14)

где  - истинные значения углов.

Принимая во внимание отношение (2.14), получим еще одно уравнение – условное уравнение полюса

. (2.15)

Таким образом мы имеем четыре условных уравнения. Три из них представлены в линейном виде. Четвертое (2.15) необходимо привести к линейному виду.

Разложим (2.15) в ряд Тейлора, ограничившись первыми членами разложения. Для этого найдем частные производные по переменным  в числителе

.

Умножим в этом выражении числитель и знаменатель на . После преобразований с учетом (2.14) получим

.

Аналогично

.

Переходим к знаменателю

.

Аналогично

.

Теперь можно записать уравнение (2.15) в линейном виде

 (2.16)

где ,

множитель  необходим для перехода от радианной меры к угловой.

Определяем коэффициенты условных уравнений и заносим их в соответствующие колонки табл. 10.

Вычисляем свободные члены (невязки) *W* условных уравнений, которые помещаем в нижней части табл. 10.

Численные значения коэффициентов условных уравнений, представленные в табл. 10, - элементы матрицы

.

Транспонируем матрицу *bT*

.

Умножив слева матрицу *b* на матрицу *bT*, получим матрицу коэффициентов нормальных уравнений коррелат

.

Определяем матрицу , обратную матрице 

.

Контроль .

Вычисляем по формуле (2.3) коррелаты

.

Записываем их в табл. 10.

Находим поправки

.

Осуществляем контроль уравнительных вычислений. Для этой цели служит формула

.

В результате имеем

,

что лежит в пределах точности вычислений.

Поправки записываем в соответствующую колонку таблице 10 и вычисляем уравненные углы.

Вычисляем эмпирическую среднюю квадратическую ошибку измеренного угла

,

и оцениваем ее надежность



Находим среднюю квадратическую ошибку уравненного угла

.

Используя уравненные углы по формулам Юнга, вычисляем координаты определяемых пунктов (табл. 11).

Таблица 11 - Вычисление координат определяемых пунктов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Наименование пунктов | Уравненные углы | Координаты | |
| *Х* | *Y* |
| *B* |  | 602815,386 | 7239915,593 |
| *A* |  | 600449,146 | 723962,382 |
| *D* |  | 600141,021 | 7243569,854 |
| *B* |  | 602815,386 | 7239915,593 |
| *B* |  | 602815,386 | 7239915,593 |
| *A* |  | 600449,146 | 7239628,382 |
| *C* |  | 602847,421 | 7243135,237 |
| *B* |  | 602815,386 | 7239915,593 |

**Список рекомендуемой литературы**

1. Голубев В.В., Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений. Академический проект, - М.: 2020 г., 247 с.

2. Губеладзе, А.Р. ТМОГИ. Обработка результатов измерений и уравнивание полигонометрических ходов: учеб. пособие / А.Р. Губеладзе. - Ростов н/Д : Рост. гос. строит. ун-т, 2013. - 93 с.

3. Губеладзе А.Р., Яговкина Е.Н., Губеладзе И.О. Введение в теорию ошибок измерений: Учебное пособие.- Ростов н/ Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2015.- 162 с.: ил.

4. Губеладзе, О.А. Геодезия. Уравнивание нивелирной сети III класса: учеб. пособие / О.А. Губеладзе. - Ростов н/Д : Рост. гос. строит. ун-т, 2013. - 81 с.

5. Практикум по высшей геодезии / Под редакцией Н.В. Яковлева.- М.: Недра, 1982.-368 с.

6. Селиханович, В.Г. Геодезия: учебник для вузов / В.Г. Селиханович. –Москва : Недра, 2000. – 544 с.

7. Селиханович, В.Г. Практикум по геодезии / В.Г. Селиханович.- Москва: Недра, 2000. – 382 с.

8. Яковлев Н.В. Высшая геодезия: учебник для вузов.- М.: Недра, 1989.- 445 с.: ил.

ПРИЛОЖЕНИЕ

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вари- анты | Координаты пунктов, м | | | |
| *А* | | *С* | |
| *X* | *У* | *X* | *У* |
| 1 | 1757,252 | 2932,492 | 1251,084 | 2387,785 |
| 2 | 2694,494 | 3813,353 | 1754,555 | 3885,592 |
| 3 | 2414,841 | 3905,431 | 2060,003 | 3305,003 |
| 4 | 4381,484 | 6015,494 | 3511,882 | 5840,014 |
| 5 | 4038,792 | 7179,476 | 3338,211 | 7954,731 |
| 6 | 4168,724 | 3186,854 | 4106,433 | 2508,660 |
| 7 | 5387,721 | 5557,247 | 5171,235 | 4929,561 |
| 8 | 7264,005 | 7912,731 | 6520,976 | 7545,692 |
| 9 | 3105,834 | 9324,414 | 2229,642 | 9833,626 |
| 10 | 4990,283 | 2514,782 | 4046,462 | 2985,703 |
| 11 | 8055,206 | 3910,343 | 7186,574 | 3630,312 |
| 12 | 6280,472 | 5405,204 | 6005,613 | 4739,162 |
| 13 | 5220,494 | 7368,144 | 5133,241 | 6727,383 |
| 14 | 3894,521 | 9979,232 | 3304,677 | 9481,535 |
| 15 | 7807,803 | 1708,021 | 6863,431 | 1928,345 |
| 16 | 2012,704 | 9258,572 | 2057,152 | 8612,814 |
| 17 | 4527,416 | 3943,451 | 3611,510 | 3893,492 |
| 18 | 8050,272 | 5087,911 | 7422,642 | 5936,791 |
| 19 | 3486,024 | 3657,422 | 3197,650 | 3041,686 |
| 20 | 4418,983 | 5886,914 | 3603,581 | 5614,014 |
| 21 | 5221,235 | 3283,703 | 5058,113 | 2604,900 |
| 22 | 2279,304 | 5494,944 | 2123,944 | 4859,990 |
| 23 | 7038,656 | 8004,512 | 6365,763 | 7568,892 |
| 24 | 5043,383 | 7390,572 | 5016,722 | 6746,411 |
| 25 | 2152,062 | 8988,553 | 2262,912 | 8344,361 |